

メネラウスの定理とチェバの定理

- § 1. 共線・共点 #2 ページ
- § 2. メネラウスの定理 #3 ~#5 ページ
- § 3. チェバの定理 #6 ~#14 ページ
- § 4. チェバの定理を使わない「別解」 #15 ページ

参拾萬数学工房

<http://www.geocities.jp/osaqmath/>

§ 1. 共線・共点

- 3 点が同一直線上にあることを、「3 点は 共線 な位置にある」、または単に「3 点は 共線 である」という。(この 3 点のことを 共線点 ということもある。)
- 3 直線が 1 点で交わることを、「3 直線は 共点 な位置にある」、または単に「3 直線は 共点 である」という。(この 3 直線のことを 共点線 ということもある。)

3 点が共線でないときは、「3 点は一般の位置にある」という。同様に、3 直線が共点でないときは、「3 直線は一般の位置にある」という。このことからわかる通り、「3 点が共線である」ということは、3 点が特別な位置関係にあることを意味し、また、「3 直線が共点である」ということは、3 直線が特別な位置関係にあることを意味する。

重ねて強調しておくが、「共線」、「共点」はいずれも 位置関係 を表す用語である。くれぐれも、次のような 誤用 をしないように注意すること。

誤用例① 「3 点 A, B, C の共線を l とする」 → この表現は誤り

誤用例② 「3 直線 l, m, n の共点を P とする」 → この表現は誤り

- 「メネラウスの定理」は、「共線」に関する定理である。
- 「チェバの定理」は、「共点」に関する定理である。

§ 2. メネラウスの定理

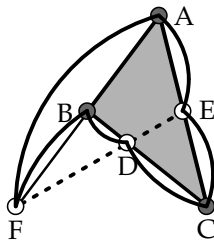
メネラウスの定理

3点 D, E, F をそれぞれ $\triangle ABC$ の3辺 BC, CA, AB の 内分点 または 外分点 とするとき、3点 D, E, F が共線であるならば、等式

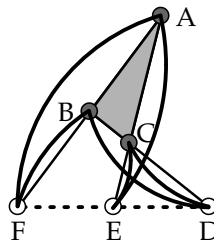
$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

が成り立つ。

【図1】

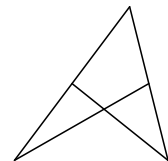


【図2】



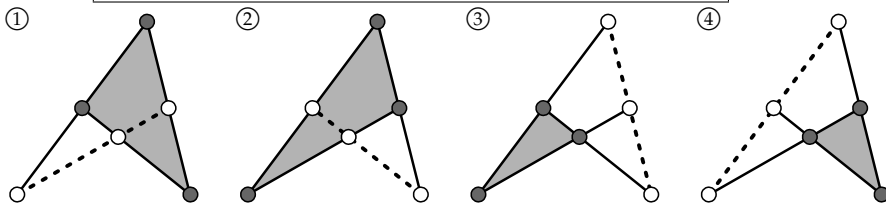
【メネラウスの図形】

「メネラウスの定理」を使えば、右の図（以後「メネラウスの図形」と呼ぶ）を構成する4直線のうちの2本について線分比がわかっているとき、残る2本の直線の線分比を求めることができる。



4本の直線から3本を選ぶ方法は ${}_4C_3$ 通り、すなわち4通りある。それをすべて図示すると次の図のようになる。

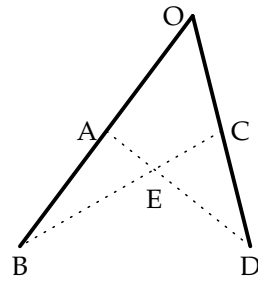
「メネラウスの図形」内の3直線の選び方（全4通り）



基本例題 A-1.

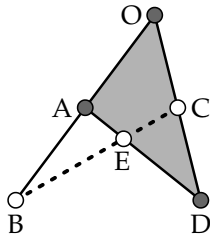
右図で、 $OA : AB = 2 : 1$ 、 $OC : CD = 1 : 1$ であるとき、

- (1) $AE : ED$ を求めよ。
- (2) $BE : EC$ を求めよ。

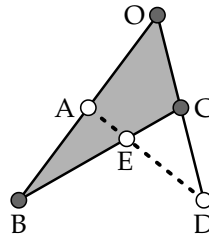


(解法)

(1)



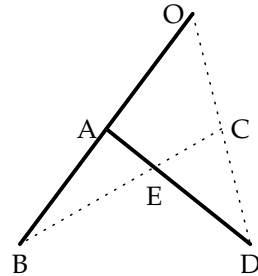
(2)



基本例題 A-2.

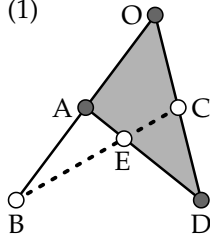
右図で、 $OA : AB = 2 : 1$ 、 $AE : ED = 1 : 2$ であるとき、

- (1) $OC : CD$ を求めよ。
- (2) $BE : EC$ を求めよ。

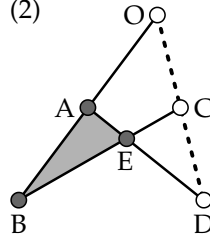


(解法)

(1)



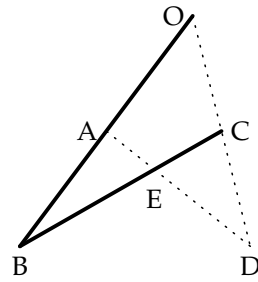
(2)



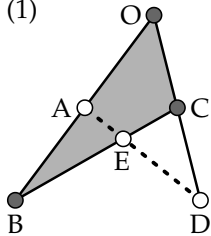
基本例題 A-3.

右図で、 $OA : AB = 2 : 1$, $BE : EC = 1 : 1$ であるとき、

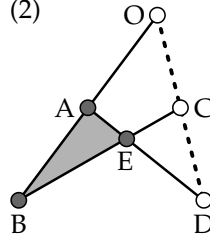
- (1) $OC : CD$ を求めよ。
- (2) $AE : ED$ を求めよ。



(解法) (1)



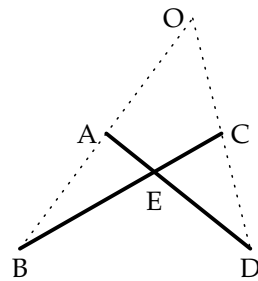
(2)



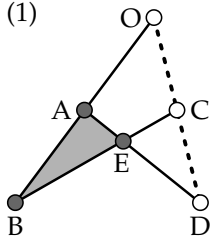
基本例題 A-4.

右図で、 $AE : ED = 1 : 3$, $BE : EC = 2 : 1$ であるとき、

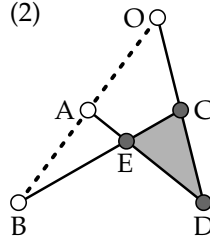
- (1) $OA : AB$ を求めよ。
- (2) $OC : CD$ を求めよ。



(解法) (1)



(2)



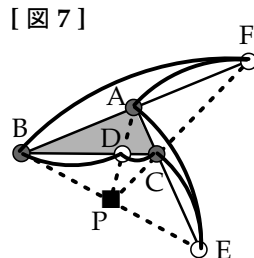
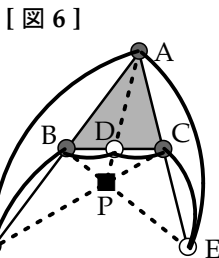
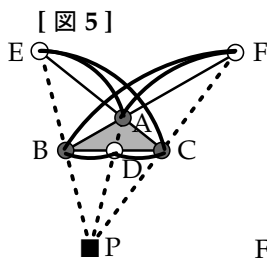
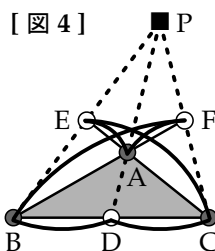
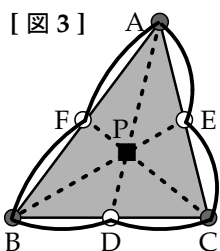
§ 3. チェバの定理

チェバの定理

3点 D, E, F をそれぞれ $\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB の 内分点 または 外分点 とするとき、3 直線 AD, BE, CF が共点であるならば、等式

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

が成り立つ。



[チェバの定理の証明]

メネラウスの定理より、

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BC}{CD} \times \frac{DP}{PA} = 1,$$

$$\frac{AP}{PD} \times \frac{DB}{BC} \times \frac{CE}{EA} = 1.$$

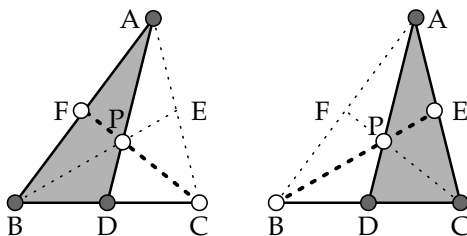
この2式を辺々かけて整理すれば、

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

となる。

[証明終]

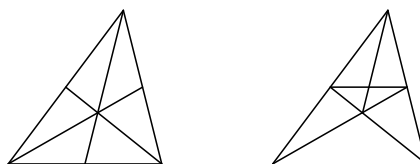
[図3]の場合 (他も同様)



前ページの〔証明〕は、「チェバの定理で求められる線分比は、メネラウスの定理を2回適用して求めることができる」ということを意味している（→#15 ページ）。したがって、実は、メネラウスの定理さえ知っていれば、チェバの定理は必ずしも必須ではない。（もちろん知っていた方がよいが、チェバの定理はメネラウスの定理よりも複雑なので、無理にすべてを覚えようとする必要はない。）

「チェバの定理」と「メネラウスの定理」を使えば、右の図（以後「チェバの図形」と呼ぶ）を構成する6直線のうちの2本について線分比がわかっているとき、残る4本の直線の線分比を求めることができる（実際には、メネラウスの定理だけで全て求められる）。

【チェバの図形①】 【チェバの図形②】

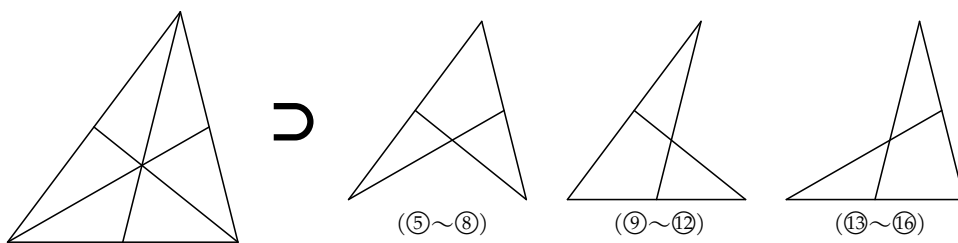


6本の直線から3本を選ぶ方法は $\binom{6}{3}$ 通り、すなわち20通りある。それをすべて図示すると、#8～#9 ページの図のようになる。

なお、「チェバの図形①」および「チェバの図形②」に次の3つの「メネラウスの図形」が含まれていることに注意すれば、⑤～⑧、⑨～⑫、⑬～⑯はいずれも§2. で述べたことを繰り返しているに過ぎない。

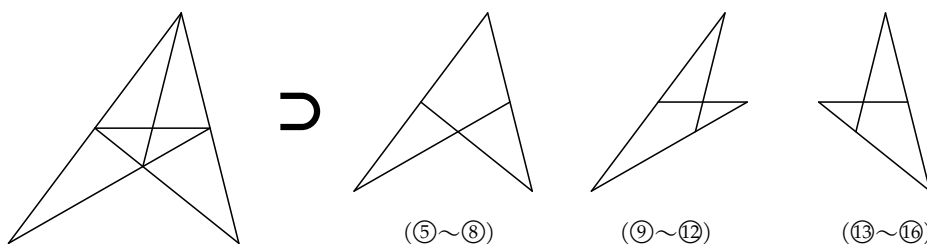
【チェバの図形①】

【メネラウスの図形】

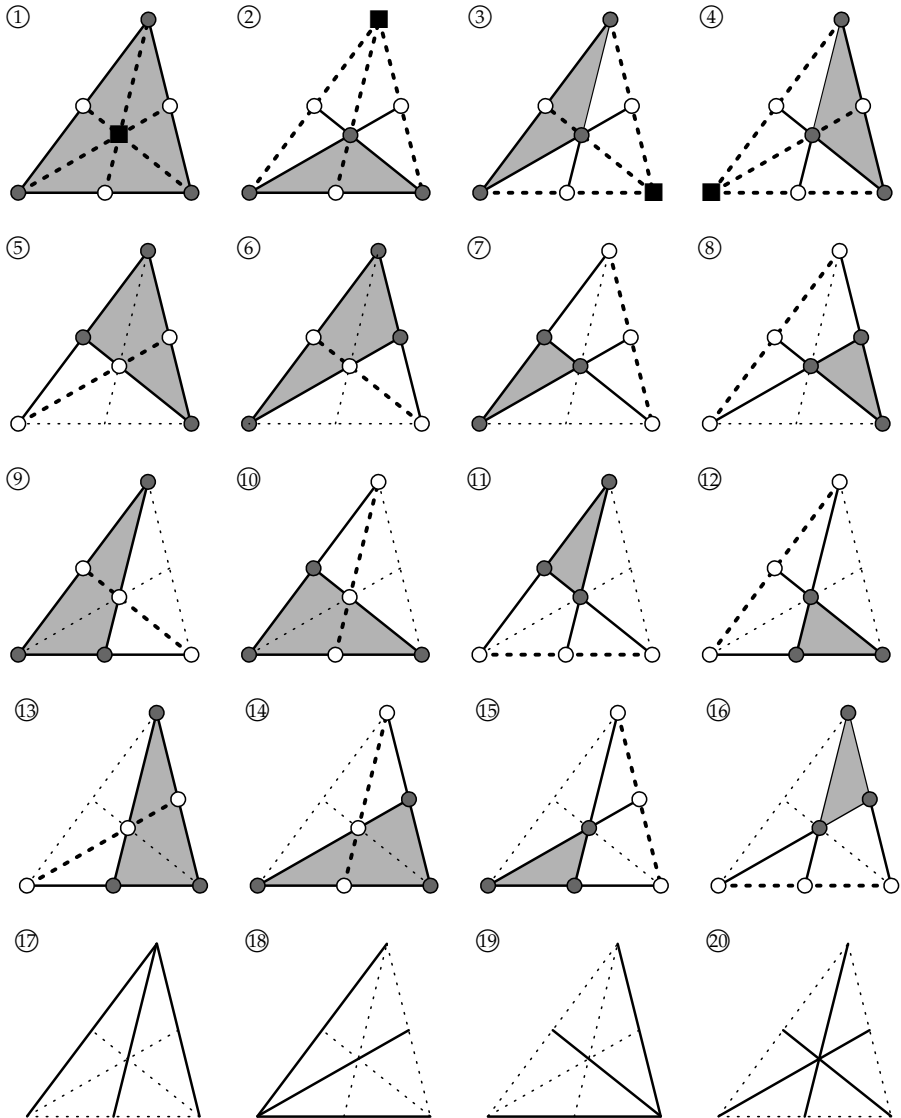


【チェバの図形②】

【メネラウスの図形】

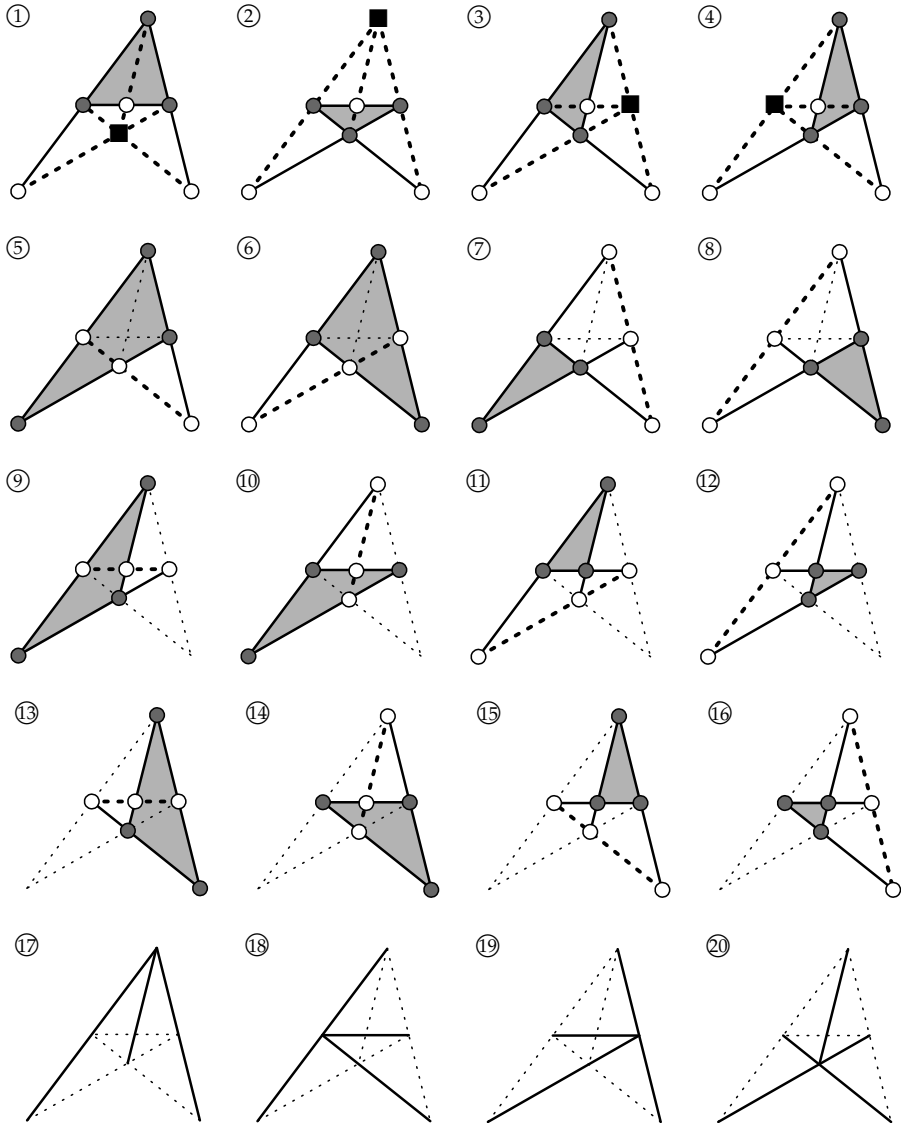


チェバの図形①内の3直線の選び方 (全 20 通り)



これらのうち、①～④は「チェバの定理」、⑤～⑯は「メネラウスの定理」を用いる。残りの⑰～⑳ は3直線が「共点」となり、三角形が作られない。

チェバの図形②内の3直線の選び方 (全 20 通り)

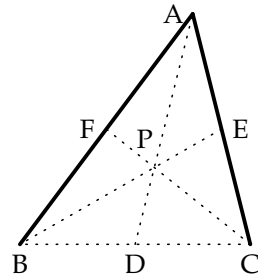


これらのうち、①～④は「チェバの定理」、⑤～⑯は「メネラウスの定理」を用いる。残りの⑰～⑳ は3直線が「共点」となり、三角形が作られない。

基本例題 B-1.

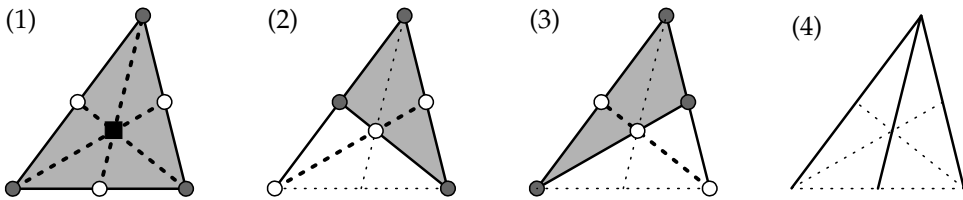
右図で、 $AF : FB = 1 : 2$, $AE : EC = 2 : 1$ であるとき、

- (1) $BD : DC$ を求めよ。 (2) $FP : PC$ を求めよ。
 (3) $BP : PE$ を求めよ。 (4) $AP : PD$ を求めよ。



(解法)

(1) は [図 3] 型のチェバ三角形, (2) と (3) は [図 1] 型のメネラウス三角形である。

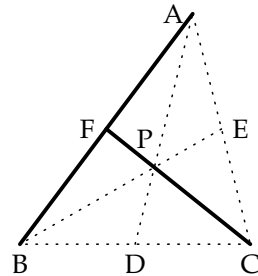


(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは、(1)~(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 B-2.

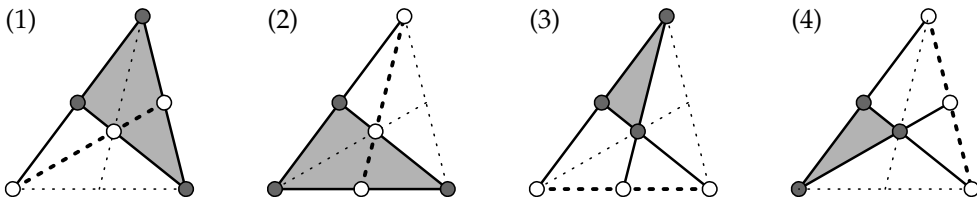
右図で、 $AF : FB = 1 : 2$, $FP : PC = 1 : 2$ であるとき、

- (1) $AE : EC$ を求めよ。 (2) $BD : DC$ を求めよ。
 (3) $AP : PD$ を求めよ。 (4) $BP : PE$ を求めよ。



(解法)

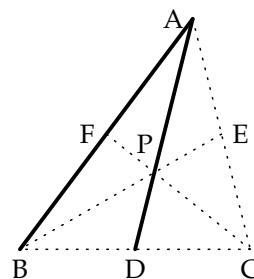
(1) と (2) は [図 1] 型のメネラウス三角形, (3) と (4) は [図 2] 型のメネラウス三角形である。



基本例題 B-3.

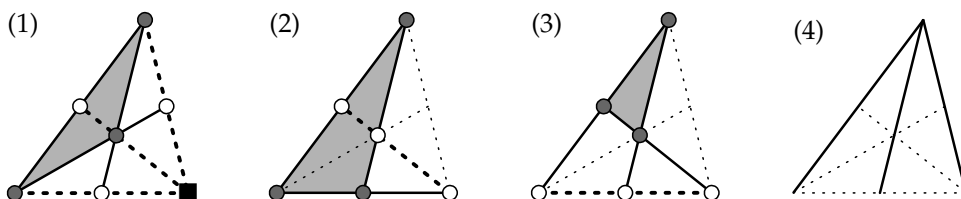
右図で、 $AF : FB = 1 : 2$ 、 $AP : PD = 1 : 1$ であるとき、

- (1) $BP : PE$ を求めよ。 (2) $BD : DC$ を求めよ。
 (3) $FP : PC$ を求めよ。 (4) $AE : EC$ を求めよ。



(解法)

(1) は [図 4] 型のチェバ三角形、(2) は [図 1] 型のメネラウス三角形、(3) は [図 2] 型のメネラウス三角形である。

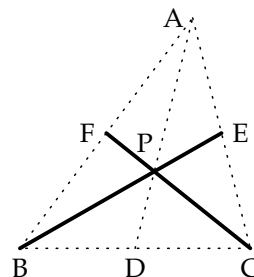


(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは、(1)~(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 B-4.

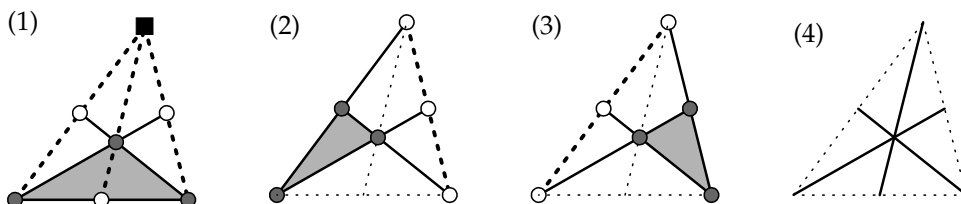
右図で、 $FP : PC = 1 : 3$ 、 $BP : PE = 3 : 2$ であるとき、

- (1) $BD : DC$ を求めよ。 (2) $AF : FB$ を求めよ。
 (3) $AE : EC$ を求めよ。 (4) $AP : PD$ を求めよ。



(解法)

(1) は [図 4] 型のチェバ三角形、(2) と (3) は [図 2] 型のメネラウス三角形である。

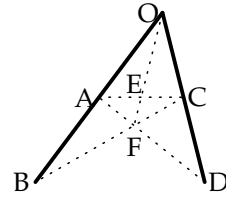


(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは、(1)~(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C-1.

右図で、 $OA : AB = 2 : 1$ 、 $OC : CD = 1 : 3$ であるとき、

- (1) $AE : EC$ を求めよ。 (2) $AF : FD$ を求めよ。
 (3) $BF : FC$ を求めよ。 (4) $OE : EF$ を求めよ。



(解法)

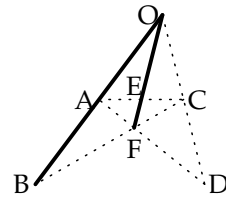
(1) は【図 6】型のチェバ三角形、(2) と (3) は【図 1】型のメネラウス三角形である。

(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは、(1)～(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C-2.

右図で、 $OA : AB = 1 : 1$ 、 $OE : EF = 3 : 1$ であるとき、

- (1) $AF : FD$ を求めよ。 (2) $BF : FC$ を求めよ。
 (3) $AE : EC$ を求めよ。 (4) $OC : CD$ を求めよ。



(解法)

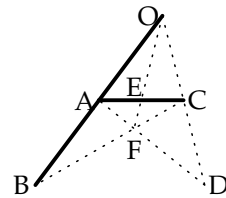
(1) は【図 7】型のチェバ三角形、(2) は【図 1】型のメネラウス三角形、(3) は【図 2】型のメネラウス三角形である。

(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは、(1)～(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C-3.

右図で、 $OA : AB = 2 : 1$ 、 $AE : EC = 1 : 2$ であるとき、

- (1) $OC : CD$ を求めよ。 (2) $BF : FC$ を求めよ。
 (3) $OE : EF$ を求めよ。 (4) $AF : FD$ を求めよ。



(解法)

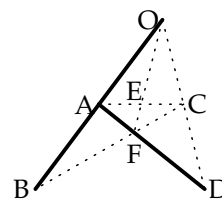
(1) は【図 6】型のチェバ三角形、(2) は【図 1】型のメネラウス三角形、(3) は【図 2】型のメネラウス三角形である。

(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは、(1)～(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C-4.

右図で、 $OA : AB = 2 : 1$ 、 $AF : FD = 1 : 2$ であるとき、

- (1) $OE : EF$ を求めよ。 (2) $OC : CD$ を求めよ。
 (3) $BF : FC$ を求めよ。 (4) $AE : EC$ を求めよ。



(解法)

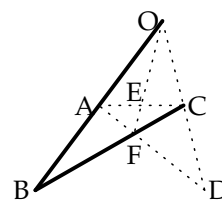
(1) は【図 7】型のチェバ三角形，(2) は【図 1】型のメネラウス三角形，(3) は【図 2】型のメネラウス三角形である。

(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)～(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C-5.

右図で、 $OA : AB = 1 : 1$ 、 $BF : FC = 3 : 1$ であるとき、

- (1) $OC : CD$ を求めよ。 (2) $OE : EF$ を求めよ。
 (3) $AE : EC$ を求めよ。 (4) $AF : FD$ を求めよ。



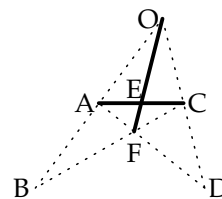
(解法)

(1) と (2) と (3) は【図 1】型のメネラウス三角形，(4) は【図 2】型のメネラウス三角形である。

基本例題 C-6.

右図で、 $OE : EF = 3 : 1$ 、 $AE : EC = 1 : 2$ であるとき、

- (1) $OA : AB$ を求めよ。 (2) $OC : CD$ を求めよ。
 (3) $AF : FD$ を求めよ。 (4) $BF : FC$ を求めよ。



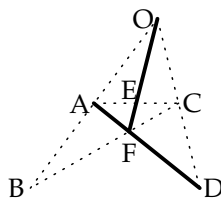
(解法)

(1) から (4) まで，すべて【図 2】型のメネラウス三角形である。

基本例題 C-7.

右図で、 $OE : EF = 2 : 1$ 、 $AF : FD = 1 : 3$ であるとき、

- (1) $OA : AB$ を求めよ。 (2) $OC : CD$ を求めよ。
 (3) $AE : EC$ を求めよ。 (4) $BF : FC$ を求めよ。



(解法)

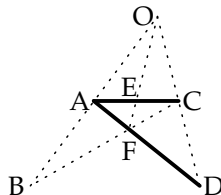
(1) は【図 7】型のチェバ三角形，(2) は【図 1】型のメネラウス三角形，(3) は【図 2】型のメネラウス三角形である。

(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)～(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C-8.

右図で、 $AE : EC = 1 : 1$ 、 $AF : FD = 1 : 3$ であるとき、

- (1) $BF : FC$ を求めよ。 (2) $OC : CD$ を求めよ。
 (3) $OE : EF$ を求めよ。 (4) $OA : AB$ を求めよ。



(解法)

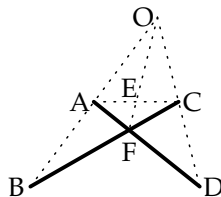
(1) は【図 5】型のチェバ三角形，(2) は【図 1】型のメネラウス三角形，(3) は【図 2】型のメネラウス三角形である。

(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)～(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

基本例題 C-9.

右図で、 $AF : FD = 1 : 2$ 、 $BF : FC = 3 : 2$ であるとき、

- (1) $AE : EC$ を求めよ。 (2) $OA : AB$ を求めよ。
 (3) $OC : CD$ を求めよ。 (4) $OE : EF$ を求めよ。



(解法)

(1) は【図 5】型のチェバ三角形，(2) と (3) は【図 2】型のメネラウス三角形である。

(4) を「メネラウスの定理」と「チェバの定理」を使って求めるときは，(1)～(3) のいずれかの答えを利用する必要がある。

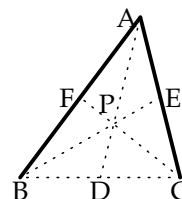
§ 4. チェバの定理を使わない「別解」

#7 ページで指摘しておいた通り、「チェバの定理」で求められる線分比は、「メネラウスの定理」を2回適用して求めることができる。

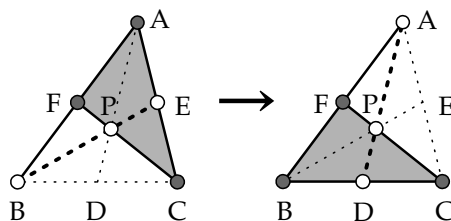
基本例題 B-1. (再掲)

右図で、 $AF : FB = 1 : 2$, $AE : EC = 2 : 1$ であるとき、

(1) $BD : DC$ を求めよ。



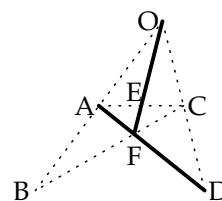
(別解) まず下図左のように $\triangle ACF$ を「メネラウス三角形」と見立てて $FP : PC$ を求めてから、その次に、下図右のように $\triangle BCF$ を「メネラウス三角形」と見立てて $BD : DC$ を求める。



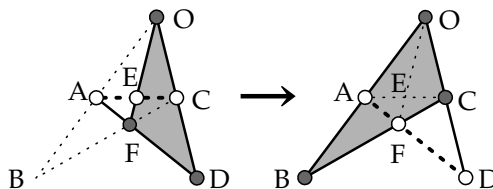
基本例題 C-7. (再掲)

右図で、 $OE : EF = 2 : 1$, $AF : FD = 1 : 3$ であるとき、

(1) $OA : AB$ を求めよ。



(別解) まず下図左のように $\triangle ODF$ を「メネラウス三角形」と見立てて $OC : CD$ を求めてから、その次に、下図右のように $\triangle OBC$ を「メネラウス三角形」と見立てて $OA : AB$ を求める。



このように、「チェバの定理」で求められる線分比は、代わりに「メネラウスの定理」を2回適用して求めることもできるので、「メネラウスの定理」の方が「チェバの定理」よりも基本的であると言える。